

PHẦN I: ĐẠI SỐ

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ.

1. Điều kiện để căn thức có nghĩa.

\sqrt{A} có nghĩa khi $A \geq 0$

2. Các công thức biến đổi căn thức.

a. $\sqrt{A^2} = |A|$

b. $\sqrt{AB} = \sqrt{A} \cdot \sqrt{B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$

c. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{\sqrt{A}}{\sqrt{B}} \quad (A \geq 0; B > 0)$

d. $\sqrt{A^2 B} = |A| \sqrt{B} \quad (B \geq 0)$

e. $A\sqrt{B} = \sqrt{A^2 B} \quad (A \geq 0; B \geq 0)$

e. $A\sqrt{B} = -\sqrt{A^2 B} \quad (A < 0; B \geq 0)$

f. $\sqrt{\frac{A}{B}} = \frac{1}{|B|} \sqrt{AB} \quad (AB \geq 0; B \neq 0)$

g. $\frac{A}{\sqrt{B}} = \frac{A\sqrt{B}}{B} \quad (B > 0)$

h. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm B} = \frac{C(\sqrt{A} \mp B)}{A - B^2} \quad (A \geq 0; A \neq B^2)$

i. $\frac{C}{\sqrt{A} \pm \sqrt{B}} = \frac{C(\sqrt{A} \mp \sqrt{B})}{A - B} \quad (A \geq 0; B \geq 0; A \neq B)$

3. Hàm số $y = ax + b$ ($a \neq 0$)

- Tính chất:

+ Hàm số đồng biến trên \mathbb{R} khi $a > 0$.

+ Hàm số nghịch biến trên \mathbb{R} khi $a < 0$.

- Đồ thị:

Đồ thị là một đường thẳng đi qua điểm $A(0;b)$; $B(-b/a;0)$.

4. Hàm số $y = ax^2$ ($a \neq 0$)

- Tính chất:

+ Nếu $a > 0$ hàm số nghịch biến khi $x < 0$ và đồng biến khi $x > 0$.

+ Nếu $a < 0$ hàm số đồng biến khi $x < 0$ và nghịch biến khi $x > 0$.

- Đồ thị:

Đồ thị là một đường cong Parabol đi qua gốc tọa độ $O(0;0)$.

+ Nếu $a > 0$ thì đồ thị nằm phía trên trục hoành.

+ Nếu $a < 0$ thì đồ thị nằm phía dưới trục hoành.

5. Vị trí tương đối của hai đường thẳng

Xét đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = a'x + b'$ (d')

(d) và (d') cắt nhau $\Leftrightarrow a \neq a'$

(d) // (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b \neq b'$

(d) \equiv (d') $\Leftrightarrow a = a'$ và $b = b'$

6. Vị trí tương đối của đường thẳng và đường cong.

Xét đường thẳng $y = ax + b$ (d) và $y = ax^2$ (P)

(d) và (P) cắt nhau tại hai điểm

(d) tiếp xúc với (P) tại một điểm

(d) và (P) không có điểm chung

7. Phương trình bậc hai.

Xét phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Công thức nghiệm	Công thức nghiệm thu gọn
$\Delta = b^2 - 4ac$	$\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$
Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$	- Nếu $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt: $x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$
Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép : $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$	- Nếu $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$
Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm	- Nếu $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm

8. Hệ thức Viet và ứng dụng.

- Hệ thức Viet:

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} S = x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ P = x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

- Một số ứng dụng:

+ Tìm hai số u và v biết $u + v = S$; $u \cdot v = P$ ta giải phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

(Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$)

+ Nhẩm nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

Nếu $a + b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = 1 ; x_2 = \frac{c}{a}$$

Nếu $a - b + c = 0$ thì phương trình có hai nghiệm:

$$x_1 = -1 ; x_2 = -\frac{c}{a}$$

9. Giải bài toán bằng cách lập phương trình, hệ phương trình

Bước 1: Lập phương trình hoặc hệ phương trình

Bước 2: Giải phương trình hoặc hệ phương trình

Bước 3: Kiểm tra các nghiệm của phương trình hoặc hệ phương trình nghiệm nào thích hợp với bài toán và kết luận

B. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Rút gọn biểu thức

Bài toán: Rút gọn biểu thức A

- ☛ Để rút gọn biểu thức A ta thực hiện các bước sau:
 - Quy đồng mẫu thức (nếu có)
 - Đưa bớt thừa số ra ngoài căn thức (nếu có)
 - Trục căn thức ở mẫu (nếu có)
 - Thực hiện các phép tính: lũy thừa, khai căn, nhân chia....
 - Cộng trừ các số hạng đồng dạng.

Dạng 2: Bài toán tính toán

Bài toán 1: Tính giá trị của biểu thức A.

☛ Tính A mà không có điều kiện kèm theo đồng nghĩa với bài toán *Rút gọn biểu thức A*

Bài toán 2: Tính giá trị của biểu thức A(x) biết x = a

- ☛ Cách giải:
 - Rút gọn biểu thức A(x).
 - Thay x = a vào biểu thức rút gọn.

Dạng 3: Chứng minh đẳng thức

Bài toán: Chứng minh đẳng thức A = B

- ☛ Một số phương pháp chứng minh:
 - *Phương pháp 1:* Dựa vào định nghĩa.
 $A = B \Leftrightarrow A - B = 0$
 - *Phương pháp 2:* Biến đổi trực tiếp.
 $A = A_1 = A_2 = \dots = B$
 - *Phương pháp 3:* Phương pháp so sánh.
$$\left. \begin{array}{l} A = A_1 = A_2 = \dots = C \\ B = B_1 = B_2 = \dots = C \end{array} \right\} \rightarrow A = B$$
 - *Phương pháp 4:* Phương pháp tương đương.
 $A = B \Leftrightarrow A' = B' \Leftrightarrow A'' = B'' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (*)$
(*) đúng do đó $A = B$
 - *Phương pháp 5:* Phương pháp sử dụng giả thiết.
 - *Phương pháp 6:* Phương pháp quy nạp.
 - *Phương pháp 7:* Phương pháp dùng biểu thức phụ.

Dạng 4: Chứng minh bất đẳng thức

Bài toán: Chứng minh bất đẳng thức A > B

☛ **Một số bất đẳng thức quan trọng:**

- **Bất đẳng thức Cosi:**

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \dots \cdot a_n} \quad (\text{với } a_1, a_2, a_3, \dots, a_n \geq 0)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $a_1 = a_2 = a_3 = \dots = a_n$

- **Bất đẳng thức BunhiaCôpxki:**

Với mọi số $a_1; a_2; a_3; \dots; a_n; b_1; b_2; b_3; \dots; b_n$

$$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + \dots + a_n b_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 + \dots + b_n^2)$$

Dấu “=” xảy ra khi và chỉ khi: $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \frac{a_3}{b_3} = \dots = \frac{a_n}{b_n}$

☛ **Một số phương pháp chứng minh:**

- *Phương pháp 1:* Dựa vào định nghĩa

$$A > B \Leftrightarrow A - B > 0$$

- *Phương pháp 2:* Biến đổi trực tiếp

$$A = A_1 = A_2 = \dots = B + M^2 > B \text{ nếu } M \neq 0$$

- *Phương pháp 3:* Phương pháp tương đương

$$A > B \Leftrightarrow A' > B' \Leftrightarrow A'' > B'' \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow (*)$$

(*) đúng do đó $A > B$

- *Phương pháp 4:* Phương pháp dùng tính chất bắc cầu

$$A > C \text{ và } C > B \rightarrow A > B$$

- *Phương pháp 5:* Phương pháp phản chứng

Để chứng minh $A > B$ ta giả sử $B > A$ và dùng các phép biến đổi tương đương để dẫn đến điều vô lí khi đó ta kết luận $A > B$.

- *Phương pháp 6:* Phương pháp sử dụng giả thiết.

- *Phương pháp 7:* Phương pháp quy nạp.

- *Phương pháp 8:* Phương pháp dùng biểu thức phụ.

Dạng 5: Bài toán liên quan tới phương trình bậc hai

Bài toán 1: Giải phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$)

☛ **Các phương pháp giải:**

- *Phương pháp 1:* Phân tích đưa về phương trình tích.

- *Phương pháp 2:* Dùng kiến thức về căn bậc hai

$$x^2 = a \rightarrow x = \pm \sqrt{a}$$

- *Phương pháp 3:* Dùng công thức nghiệm

$$\text{Ta có } \Delta = b^2 - 4ac$$

+ Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} ; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

+ Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$$

+ Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm

- *Phương pháp 4:* Dùng công thức nghiệm thu gọn

$$\text{Ta có } \Delta' = b'^2 - ac \text{ với } b = 2b'$$

+ Nếu $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a} ; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

+ Nếu $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép

$$x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$$

+ Nếu $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm

- *Phương pháp 5:* Nhẩm nghiệm nhờ định lí Vi-et.

Nếu x_1, x_2 là nghiệm của phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) thì:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} \end{cases}$$

Chú ý: Nếu a, c trái dấu tức là $a \cdot c < 0$ thì phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt.

Bài toán 2: Biện luận theo m sự có

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m).

☛ Xét hệ số a : Có thể có 2 khả năng

a. Trường hợp $a = 0$ với vài giá trị nào đó của m .

Giả sử $a = 0 \Leftrightarrow m = m_0$ ta có:

(*) trở thành phương trình bậc nhất $ax + c = 0$ (**)

+ Nếu $b \neq 0$ với $m = m_0$: (**) có một nghiệm $x = -c/b$

+ Nếu $b = 0$ và $c = 0$ với $m = m_0$: (**) vô định \Leftrightarrow (*) vô định

+ Nếu $b = 0$ và $c \neq 0$ với $m = m_0$: (**) vô nghiệm \Leftrightarrow (*) vô nghiệm

b. Trường hợp $a \neq 0$: Tính Δ hoặc Δ'

+ Tính $\Delta = b^2 - 4ac$

Nếu $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}; x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$$

Nếu $\Delta = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b}{2a}$

Nếu $\Delta < 0$: Phương trình vô nghiệm

+ Tính $\Delta' = b'^2 - ac$ với $b = 2b'$

Nếu $\Delta' > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b' + \sqrt{\Delta'}}{a}; x_2 = \frac{-b' - \sqrt{\Delta'}}{a}$$

Nếu $\Delta' = 0$: Phương trình có nghiệm kép: $x_1 = x_2 = \frac{-b'}{a}$

Nếu $\Delta' < 0$: Phương trình vô nghiệm

- Ghi tóm tắt phần biện luận trên.

Bài toán 3: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có nghiệm.

☛ Có hai khả năng để phương trình bậc hai $ax^2 + bx + c = 0$ có nghiệm:

1. Hoặc $a = 0, b \neq 0$

2. Hoặc $a \neq 0, \Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$

Tập hợp các giá trị m là toàn bộ các giá trị m thỏa mãn điều kiện 1 hoặc điều kiện 2.

Bài toán 4: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm phân biệt.

☛ Điều kiện có hai nghiệm phân biệt $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' > 0 \end{cases}$

Bài toán 5: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 1 nghiệm.

☛ Điều kiện có một nghiệm:

$$\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$$

Bài toán 6: Tìm điều kiện của tham số

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có nghiệm kép.

☞ Điều kiện có nghiệm kép: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Bài toán 7: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) vô nghiệm.

☞ Điều kiện có một nghiệm: $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a = 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

Bài toán 8: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 1 nghiệm.

☞ Điều kiện có một nghiệm: $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta = 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} a \neq 0 \\ \Delta' = 0 \end{cases}$

Bài toán 9: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có hai nghiệm cùng dấu.

☞ Điều kiện có hai nghiệm cùng dấu: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$

Bài toán 10: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm dương.

☞ Điều kiện có hai nghiệm dương: $\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} > 0 \end{cases}$

Bài toán 11: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (trong đó a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm âm.

☞ Điều kiện có hai nghiệm âm:

$\begin{cases} \Delta \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$ hoặc $\begin{cases} \Delta' \geq 0 \\ P = \frac{c}{a} > 0 \\ S = -\frac{b}{a} < 0 \end{cases}$

Bài toán 12: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm trái dấu.

☞ Điều kiện có hai nghiệm trái dấu:

$P < 0$ hoặc a và c trái dấu.

Bài toán 13: Tìm điều kiện của tham số m để phương trình bậc hai

$ax^2 + bx + c = 0$ (*) (a, b, c phụ thuộc tham số m) có một nghiệm $x = x_1$.

☞ Cách giải:

- Thay $x = x_1$ vào phương trình (*) ta có: $ax_1^2 + bx_1 + c = 0 \rightarrow m$

- Thay giá trị của m vào (*) $\rightarrow x_1, x_2$

- Hoặc tính $x_2 = S - x_1$ hoặc $x_2 = \frac{P}{x_1}$

Bài toán 14 : Tìm điều kiện của tham :

$ax^2 + bx + c = 0$ (a, b, c phụ thuộc tham số m) có 2 nghiệm x_1, x_2 thoả mãn các điều kiện:

- a. $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$ b. $x_1^2 + x_2^2 = k$
c. $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n$ d. $x_1^2 + x_2^2 \geq h$ e. $x_1^3 + x_2^3 = t$

☛ Điều kiện chung: $\Delta \geq 0$ hoặc $\Delta' \geq 0$ (*)

Theo định lí Viet ta có:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = S & (1) \\ x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = P & (2) \end{cases}$$

- a. Trường hợp: $\alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma$

$$\text{Giải hệ } \begin{cases} x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} \\ \alpha x_1 + \beta x_2 = \gamma \end{cases} \longrightarrow x_1, x_2$$

Thay x_1, x_2 vào (2) $\rightarrow m$

Chọn các giá trị của m thoả mãn (*)

- b. Trường hợp: $x_1^2 + x_2^2 = k \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = k$

Thay $x_1 + x_2 = S = \frac{-b}{a}$ và $x_1 \cdot x_2 = P = \frac{c}{a}$ vào ta có:

$$S^2 - 2P = k \rightarrow \text{Tìm được giá trị của } m \text{ thoả mãn (*)}$$

- c. Trường hợp: $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = n \Leftrightarrow x_1 + x_2 = nx_1x_2 \Leftrightarrow -b = nc$

Giải phương trình $-b = nc$ tìm được m thoả mãn (*)

- d. Trường hợp: $x_1^2 + x_2^2 \geq h \Leftrightarrow S^2 - 2P - h \geq 0$

Giải bất phương trình $S^2 - 2P - h \geq 0$ chọn m thoả mãn (*)

- e. Trường hợp: $x_1^3 + x_2^3 = t \Leftrightarrow S^3 - 3PS = t$

Giải phương trình $S^3 - 3PS = t$ chọn m thoả mãn (*)

Bài toán 15 : Tìm hai số u và v biết tổng $u + v = S$ và tích $u \cdot v = P$ của chúng

☛ Ta có u và v là nghiệm của phương trình:

$$x^2 - Sx + P = 0 \quad (*)$$

(Điều kiện $S^2 - 4P \geq 0$)

Giải phương trình (*) ta tìm được hai số u và v cần tìm.

Nội dung 6.

Giải phương trình bằng phương pháp đặt ẩn số phụ

Bài toán 1: Giải phương trình trùng phương $ax^4 + bx^2 + c = 0$

☛ Đặt $t = x^2$ ($t \geq 0$) ta có phương trình $at^2 + bt + c = 0$

Giải phương trình bậc hai ẩn t sau đó thay vào tìm ẩn x

Bảng tóm tắt

$at^2 + bt + c = 0$	$ax^4 + bx^2 + c = 0$
vô nghiệm	vô nghiệm
2 nghiệm âm	vô nghiệm
nghiệm kép âm	vô nghiệm
1 nghiệm dương	2 nghiệm đối nhau
2 nghiệm dương	4 nghiệm 2 cặp nghiệm đối nhau

Bài toán 2: Giải phương trình $A(x^2 + \frac{1}{x^2}) + B(x + \frac{1}{x}) + C = 0$

☛ Đặt $x + \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx + 1 = 0$

Suy ra $t^2 = (x + \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$

Thay vào phương trình ta có:

$$A(t^2 - 2) + Bt + C = 0 \Leftrightarrow At^2 + Bt + C - 2A = 0$$

Giải phương trình ẩn t sau đó thế vào $x + \frac{1}{x} = t$ giải tìm x .

Bài toán 3: Giải phương trình $A(x^2 + \frac{1}{x^2}) + B(x - \frac{1}{x}) + C = 0$

☛ Đặt $x - \frac{1}{x} = t \Leftrightarrow x^2 - tx - 1 = 0$

Suy ra $t^2 = (x - \frac{1}{x})^2 = x^2 + \frac{1}{x^2} - 2 \Leftrightarrow x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 + 2$

Thay vào phương trình ta có:

$$A(t^2 + 2) + Bt + C = 0 \Leftrightarrow At^2 + Bt + C + 2A = 0$$

Giải phương trình ẩn t sau đó thế vào $x - \frac{1}{x} = t$ giải tìm x .

Bài toán 4: Giải phương trình bậc cao

☛ Dùng các phép biến đổi đưa phương trình bậc cao về dạng:

+ Phương trình tích

+ Phương trình bậc hai.

Nội dung 7:

Giải hệ phương trình

Bài toán: Giải hệ phương trình
$$\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

☞ Các phương pháp giải:

- + Phương pháp đồ thị
- + Phương pháp cộng
- + Phương pháp thế
- + Phương pháp đặt ẩn phụ

Nội dung 7:

Giải phương trình vô tỉ

Bài toán 1: Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} = g(x)$ (1)

☞ Ta có $\sqrt{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 & (2) \\ f(x) = [g(x)]^2 & (3) \end{cases}$

Giải (3) đối chiếu điều kiện (2) chọn nghiệm thích hợp \rightarrow nghiệm của (1)

Bài toán 2: Giải phương trình dạng $\sqrt{f(x)} + \sqrt{h(x)} = g(x)$

☞ Điều kiện có nghĩa của phương trình

$$\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ h(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$$

Với điều kiện trên thoả mãn ta bình phương hai vế để giải tìm x.

Nội dung 8:

Giải phương trình chứa giá trị tuyệt đối

Bài toán: Giải phương trình dạng $|f(x)| = g(x)$

☞ Phương pháp 1: $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geq 0 \\ [f(x)]^2 = [g(x)]^2 \end{cases}$

☞ Phương pháp 2: Xét $f(x) \geq 0 \rightarrow f(x) = g(x)$
Xét $f(x) < 0 \rightarrow -f(x) = g(x)$

☞ Phương pháp 3: Với $g(x) \geq 0$ ta có $f(x) = \pm g(x)$

Nội dung 9:

Giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức

Bài toán: Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của hàm số $y = f(x)$

☞ Phương pháp 1: Dựa vào lũy thừa bậc chẵn.

- Biến đổi hàm số $y = f(x)$ sao cho:

$$y = M - [g(x)]^{2n}, n \in \mathbb{Z} \rightarrow y \leq M$$

Do đó $y_{\max} = M$ khi $g(x) = 0$

- Biến đổi hàm số $y = f(x)$ sao cho:

$$y = m + [h(x)]^{2k}, k \in \mathbb{Z} \rightarrow y \geq m$$

Do đó $y_{\min} = m$ khi $h(x) = 0$

☞ Phương pháp 2: Dựa vào tập giá trị hàm.

☞ Phương pháp 3: Dựa vào đẳng thức.

Nội dung 10:

Các bài toán liên quan đến hàm số

* Điểm thuộc đường - đường đi qua một điểm

Bài toán: Cho (C) là đồ thị của hàm số $y = f(x)$ và một điểm $A(x_A; y_A)$.

Hỏi (C) có đi qua A không?

☞ Đồ thị (C) đi qua $A(x_A; y_A)$ khi và chỉ khi toạ độ của A nghiệm đúng phương trình của (C) $A \in (C) \Leftrightarrow y_A = f(x_A)$

Đó đó tính $f(x_A)$

Nếu $f(x_A) = y_A$ thì (C) đi qua A.

Nếu $f(x_A) \neq y_A$ thì (C) không đi qua A.

* Sự tương giao của hai đồ thị

Bài toán : Cho (C) và (L) theo thứ tự là đồ thị hàm số

$$y = f(x) \text{ và } y = g(x)$$

Hãy khảo sát sự tương giao của hai đồ thị

☞ Toạ độ điểm chung của (C) và (L) là nghiệm của phương trình hoành độ giao điểm: $f(x) = g(x)$ (*)

- Nếu (*) vô nghiệm thì (C) và (L) không có điểm chung.

- Nếu (*) có nghiệm kép thì (C) và (L) tiếp xúc nhau.

- Nếu (*) có 1 nghiệm thì (C) và (L) có 1 điểm chung.

- Nếu (*) có 2 nghiệm thì (C) và (L) có 2 điểm chung.

* Lập phương trình đường thẳng

Bài toán 1: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ và có hệ số góc bằng k.

☞ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = ax + b$ (*)

- Xác định a: ta có $a = k$

- Xác định b: (D) đi qua $A(x_A; y_A)$ nên ta có $y_A = kx_A + b \rightarrow b = y_A - kx_A$

- Thay $a = k$; $b = y_A - kx_A$ vào (*) ta có phương trình của (D)

Bài toán 2: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua hai điểm $A(x_A; y_A)$; $B(x_B; y_B)$

☞ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = ax + b$

$$(D) \text{ đi qua } A \text{ và } B \text{ nên ta có: } \begin{cases} y_A = ax_A + b \\ y_B = ax_B + b \end{cases}$$

Giải hệ ta tìm được a và b suy ra phương trình của (D)

Bài toán 3: Lập phương trình của đường thẳng (D) có hệ số góc k và tiếp xúc với đường cong (C): $y = f(x)$

☞ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = kx + b$

Phương trình hoành độ điểm chung của (D) và (P) là: $f(x) = kx + b$ (*)

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (*) có nghiệm kép.

Từ điều kiện này ta tìm được b và suy ra phương trình của (D)

Bài toán 3: Lập phương trình của đường thẳng (D) đi qua điểm $A(x_A; y_A)$ và tiếp xúc với đường cong (C): $y = f(x)$

☞ Phương trình tổng quát của đường thẳng (D) là : $y = kx + b$

Phương trình hoành độ giao điểm của (D) và (P) là: $f(x) = kx + b$ (*)

Vì (D) tiếp xúc với (P) nên (*) có nghiệm kép.

Từ điều kiện này ta tìm được hệ thức liên hệ giữa a và b (**)

Mặt khác: (D) qua $A(x_A; y_A)$ do đó ta có $y_A = ax_A + b$ (***)

Từ (**) và (***) $\rightarrow a$ và $b \rightarrow$ Phương trình đường thẳng (D).

PHẦN II: HÌNH HỌC

A. KIẾN THỨC CẦN NHỚ

1. Hệ thức lượng trong tam giác vuông.

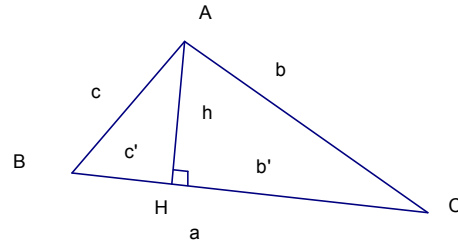
$$b^2 = ab' \quad c^2 = ac'$$

$$h^2 = b'c'$$

$$ah = bc$$

$$a^2 = b^2 + c^2$$

$$\frac{1}{h^2} = \frac{1}{b^2} + \frac{1}{c^2}$$



2. Tỷ số lượng giác của góc nhọn.

$$0 < \sin \alpha < 1 \quad 0 < \cos \alpha < 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}$$

$$\operatorname{cotg} \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

$$\operatorname{tg} \alpha \cdot \operatorname{cotg} \alpha = 1$$

$$1 + \operatorname{tg}^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}$$

$$1 + \operatorname{cotg}^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

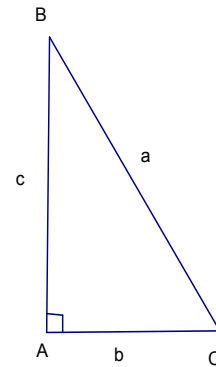
3. Hệ thức về cạnh và góc trong tam giác vuông.

$$b = a \sin B = a \cos C$$

$$b = c \operatorname{tg} B = c \operatorname{cotg} C$$

$$c = a \sin C = a \cos B$$

$$c = b \operatorname{tg} C = b \operatorname{cotg} B$$



4. Đường tròn.

- **Cách xác định:** Qua ba điểm không thẳng hàng ta vẽ được một và chỉ một đường tròn.

- **Tâm đối xứng, trục đối xứng:** Đường tròn có một tâm đối xứng; có vô số trục đối xứng.

- **Quan hệ vuông góc giữa đường kính và dây.**

Trong một đường tròn

+ Đường kính vuông góc với một dây thì đi qua trung điểm của dây ấy

+ Đường kính đi qua trung điểm của một dây không đi qua tâm thì vuông góc với dây ấy.

- Liên hệ giữa dây và khoảng cách từ

Trong một đường tròn:

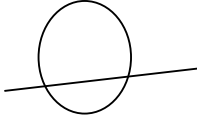
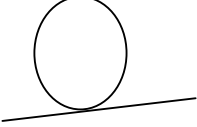
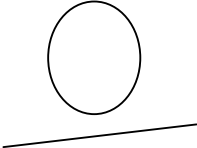
- + Hai dây bằng nhau thì cách đều tâm
- + Hai dây cách đều tâm thì bằng nhau
- + Dây nào lớn hơn thì dây đó gần tâm hơn
- + Dây nào gần tâm hơn thì dây đó lớn hơn

- Liên hệ giữa cung và dây:

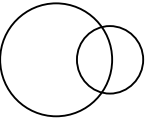
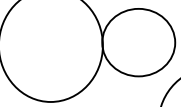
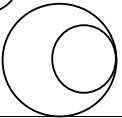
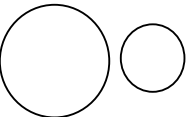
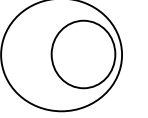
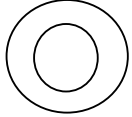
Trong một đường tròn hay trong hai đường tròn bằng nhau:

- + Hai cung bằng nhau căng hai dây bằng nhau
- + Hai dây bằng nhau căng hai cung bằng nhau
- + Cung lớn hơn căng dây lớn hơn
- + Dây lớn hơn căng cung lớn hơn.

- Vị trí tương đối của đường thẳng và đường tròn:

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Đường thẳng và đường tròn cắt nhau 	2	$d < R$
- Đường thẳng và đường tròn tiếp xúc nhau 	1	$d = R$
- Đường thẳng và đường tròn không giao nhau 	0	$d > R$

- Vị trí tương đối của đường thẳng

Vị trí tương đối	Số điểm chung	Hệ thức liên hệ giữa d và R
- Hai đường tròn cắt nhau 	2	$R - r < OO' < R + r$
- Hai đường tròn tiếp xúc nhau + Tiếp xúc ngoài  + Tiếp xúc trong 	1	$OO' = R + r$ $OO' = R - r$
- Hai đường tròn không giao nhau + (O) và (O') ở ngoài nhau  + (O) đựng (O')  + (O) và (O') đồng tâm 	0	$OO' > R + r$ $OO' < R - r$ $OO' = 0$

5. Tiếp tuyến của đường tròn

- **Tính chất của tiếp tuyến:** Tiếp tuyến vuông góc với bán kính đi qua tiếp điểm.

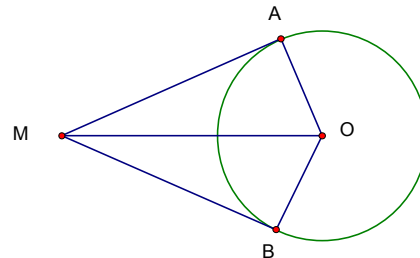
- **Dấu hiệu nhận biết tiếp tuyến:**

- + Đường thẳng và đường tròn chỉ có một điểm chung
- + Khoảng cách từ tâm của đường tròn đến đường thẳng bằng bán kính
- + Đường thẳng đi qua một điểm của đường tròn và vuông góc với bán kính đi qua điểm đó.

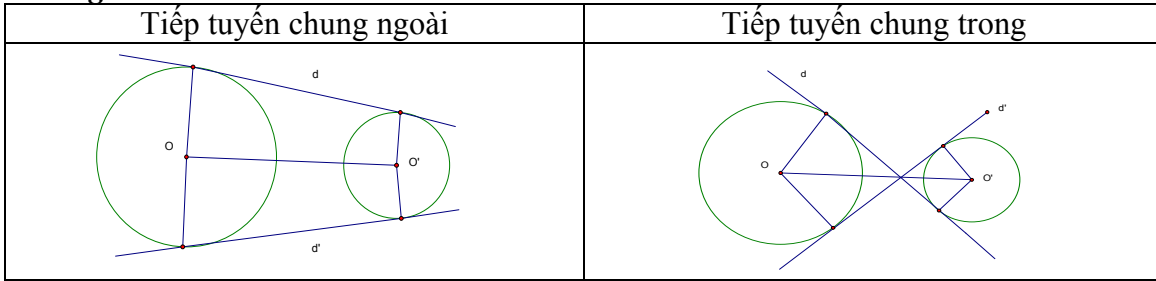
- **Tính chất của 2 tiếp tuyến cắt nhau**

MA, MB là hai tiếp tuyến cắt nhau thì:

- + $MA = MB$
- + MO là phân giác của góc AMB
- + OM là phân giác của góc AOB



**- Tiếp tuyến chung của hai đường tròn.
đường tròn đó:**



6. Góc với đường tròn

Loại góc	Hình vẽ	Công thức tính số đo
1. Góc ở tâm		$\widehat{AOB} = sd \widehat{AB}$
2. Góc nội tiếp		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} sd \widehat{AB}$
3. Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung.		$\widehat{xBA} = \frac{1}{2} sd \widehat{AB}$
4. Góc có đỉnh ở bên trong đường tròn		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd \widehat{AB} + sd \widehat{CD})$
5. Góc có đỉnh ở bên ngoài đường tròn		$\widehat{AMB} = \frac{1}{2} (sd \widehat{AB} - sd \widehat{CD})$

☛ **Chú ý:** Trong một đường tròn

- Các góc nội tiếp bằng nhau chắn các cung bằng nhau
- Các góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau
- Các góc nội tiếp chắn các cung bằng nhau thì bằng nhau
- Góc nội tiếp nhỏ hơn hoặc bằng 90^0 có số đo bằng nửa số đo của góc ở tâm cùng chắn một cung.
- Góc nội tiếp chắn nửa đường tròn là góc vuông và ngược lại góc vuông nội tiếp thì chắn nửa đường tròn.
- Góc tạo bởi tia tiếp tuyến và dây cung và góc nội tiếp cùng chắn một cung thì bằng nhau.



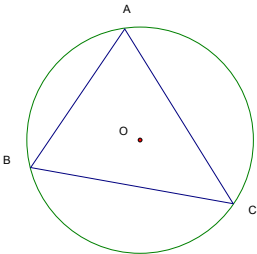
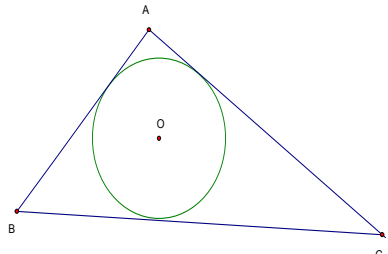
7. Độ dài đường tròn - Độ dài cung tròn.

- Độ dài đường tròn bán kính R: $C = 2\pi R = \pi d$
- Độ dài cung tròn n^0 bán kính R : $l = \frac{\pi R n}{180}$

8. Diện tích hình tròn - Diện tích hình quạt tròn

- Diện tích hình tròn: $S = \pi R^2$
- Diện tích hình quạt tròn bán kính R, cong n^0 : $S = \frac{\pi R^2 n}{360} = \frac{lR}{2}$

9. Các loại đường tròn

Đường tròn ngoại tiếp tam giác	Đường tròn nội tiếp tam giác	Đường tròn bàng tiếp tam giác
 <p>Tâm đường tròn là giao của ba đường trung trực của tam giác</p>	 <p>Tâm đường tròn là giao của ba đường phân giác trong của tam giác</p>	<p>Tâm của đường tròn bàng tiếp trong góc A là giao điểm của hai đường phân giác các góc ngoài tại B hoặc C hoặc là giao điểm của đường phân giác góc A và đường phân giác ngoài tại B (hoặc C)</p>

10. Các loại hình không gian.

a. Hình trụ.

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rh$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rh + \pi r^2$
- Thể tích hình trụ: $V = Sh = \pi r^2 h$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$

b. Hình nón:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = 2\pi rl$
- Diện tích toàn phần: $S_{tp} = 2\pi rl + \pi r^2$
- Thể tích hình trụ: $V = \frac{1}{3} \pi r^2 h$

Trong đó $\left\{ \begin{array}{l} r: \text{bán kính} \\ l: \text{đường sinh} \\ h: \text{chiều cao} \end{array} \right.$



c. Hình nón cụt:

- Diện tích xung quanh: $S_{xq} = \pi(r_1 + r_2)l$

- Thể tích: $V = \frac{1}{3}\pi h(r_1^2 + r_2^2 + r_1 r_2)$

Trong đó: $\left\{ \begin{array}{l} r_1: \text{bán kính đáy lớn} \\ r_2: \text{bán kính đáy nhỏ} \\ l: \text{đường sinh} \end{array} \right.$

d. Hình cầu.

- Diện tích mặt cầu: $S = 4\pi R^2 = \pi d$

- Thể tích hình cầu: $V = \frac{4}{3}\pi R^3$

Trong đó: $\left\{ \begin{array}{l} R: \text{bán kính} \\ d: \text{đường kính} \end{array} \right.$

11. Tứ giác nội tiếp:

☛ Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180°

- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện

- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.

- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một góc α .

B. CÁC DẠNG BÀI

Dạng 1: Chứng minh hai góc bằng nhau.

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh hai góc cùng bằng góc thứ ba
- Chứng minh hai góc bằng với hai góc bằng nhau khác
- Hai góc bằng tổng hoặc hiệu của hai góc theo thứ tự đối một bằng nhau
- Hai góc cùng phụ (hoặc cùng bù) với góc thứ ba
- Hai góc cùng nhọn hoặc cùng tù có các cạnh đối một song song hoặc v.góc
- Hai góc ó le trong, so le ngoài hoặc đồng vị
- Hai góc ở vị trí đối đỉnh
- Hai góc của cùng một tam giác cân hoặc đều
- Hai góc tương ứng của hai tam giác bằng nhau hoặc đồng dạng
- Hai góc nội tiếp cùng chắn một cung hoặc chắn hai cung bằng nhau.

Dạng 2: Chứng minh hai đoạn thẳng bằng nhau

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh hai đoạn thẳng cùng bằng đoạn thứ ba
- Hai cạnh của một tam giác cân hoặc tam giác đều
- Hai cạnh tương ứng của hai tam giác bằng nhau
- Hai cạnh đối của hình bình hành (chữ nhật, hình thoi, hình vuông)
- Hai cạnh bên của hình thang cân
- Hai dây tương hai cung bằng nhau trong một đường tròn hoặc hai đường bằng nhau.

Dạng 3: Chứng minh hai đường thẳng song song

☛ Cách chứng minh:

- Chứng minh hai đường thẳng cùng song song với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh hai đường thẳng cùng vuông góc với đường thẳng thứ ba
- Chứng minh chúng cùng tạo với một cát tuyến hai góc bằng nhau:
 - + ở vị trí so le trong
 - + ở vị trí so le ngoài
 - + ở vị trí đồng vị.
- Là hai dây chắn giữa chúng hai cung bằng nhau trong một đường tròn
- Chúng là hai cạnh đối của một hình bình hành

Dạng 4: Chứng minh hai đường thẳng vuông góc

☛ Cách chứng minh:

- Chúng song song song song với hai đường thẳng vuông góc khác.
- Chứng minh chúng là chân đường cao trong một tam giác.
- Đường kính đi qua trung điểm dây và dây.
- Chúng là phân giác của hai góc kề bù nhau.

Dạng 5: Chứng minh ba đường thẳng

☞ Cách chứng minh:

- Chứng minh chúng là ba đường cao, ba trung tuyến, ba trung trực, ba phân giác trong (hoặc một phân giác trong và phân giác ngoài của hai góc kia)
- Vận dụng định lý đảo của định lý Talet.

Dạng 6: Chứng minh hai tam giác bằng nhau

☞ Cách chứng minh:

*** Hai tam giác thường:**

- Trường hợp góc - cạnh - góc (g-c-g)
- Trường hợp cạnh - góc - cạnh (c-g-c)
- Trường hợp cạnh - cạnh - cạnh (c-c-c)

*** Hai tam giác vuông:**

- Có cạnh huyền và một góc nhọn bằng nhau
- Có cạnh huyền bằng nhau và một cạnh góc vuông bằng nhau
- Cạnh góc vuông đôi một bằng nhau

Dạng 7: Chứng minh hai tam giác đồng dạng

☞ Cách chứng minh:

*** Hai tam giác thường:**

- Có hai góc bằng nhau đôi một
- Có một góc bằng nhau xen giữa hai cạnh tương ứng tỷ lệ
- Có ba cạnh tương ứng tỷ lệ

*** Hai tam giác vuông:**

- Có một góc nhọn bằng nhau
- Có hai cạnh góc vuông tương ứng tỷ lệ

Dạng 8: Chứng minh đẳng thức hình học

☞ Cách chứng minh:

Giả sử phải chứng minh đẳng thức: $MA.MB = MC.MD$ (*)

- Chứng minh: $\triangle MAC \sim \triangle MDB$ hoặc $\triangle MAD \sim \triangle MCB$
- Nếu 5 điểm M, A, B, C, D cùng nằm trên một đường thẳng thì phải chứng minh các tích trên cùng bằng tích thứ ba:

$$MA.MB = ME.MF$$

$$MC.MD = ME.MF$$

Tức là ta chứng minh: $\triangle MAE \sim \triangle MFB$

$$\triangle MCE \sim \triangle MFD$$

$$\rightarrow MA.MB = MC.MD$$

* Trường hợp đặc biệt: $MT^2 = MA.MB$ ta chứng minh $\triangle MTA \sim \triangle MBT$

Dạng 9: Chứng minh tứ giác nội tiếp

☞ Cách chứng minh:

Dấu hiệu nhận biết tứ giác nội tiếp:

- Tứ giác có tổng hai góc đối bằng 180^0
- Tứ giác có góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong của đỉnh đối diện
- Tứ giác có 4 đỉnh cách đều một điểm.
- Tứ giác có hai đỉnh kề nhau cùng nhìn cạnh chứa hai đỉnh còn lại dưới một

góc α .

Dạng 10: Chứng minh MT là tiếp tuyến của đường tròn (O;R)

☞ Cách chứng minh:

- Chứng minh $OT \perp MT$ tại $T \in (O;R)$
- Chứng minh khoảng cách từ tâm O đến đường thẳng MT bằng bán kính
- Dùng góc nội tiếp.

Dạng 10: Các bài toán tính toán độ dài cạnh, độ lớn góc

☞ Cách tính:

- Dựa vào hệ thức lượng trong tam giác vuông.
- Dựa vào tỷ số lượng giác
- Dựa vào hệ thức giữa cạnh và góc trong tam giác vuông
- Dựa vào công thức tính độ dài, diện tích, thể tích...